

Title	Some convexity constants related to Hlawka inequalities in Banach spaces(Inequalities in operator theory and its related topics)
Author(s)	高橋, 眞映; 高橋, 泰嗣
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1027: 122-125
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/61778
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Some convexity constants related to Hlawka inequalities in Banach spaces

山形大・工 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

岡山県立大・情報工 高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)

n 次元 Euclid 空間 R^n の任意の元 x, y, z に対して、常に

$$|x+y|+|y+z|+|z+x| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z| \quad (*)$$

が成り立つ。これが良く知られた Hlawka 不等式 (cf. [1]) であるが、これは任意の (複素) Hilbert 空間 H に対しても成り立つことが知られている。これは不等式 (実際には等式が成立)

$$|x+y|^2+|y+z|^2+|z+x|^2 = |x|^2+|y|^2+|z|^2+|x+y+z|^2$$

を利用することによって示されるのであるが、これらは自然に次の問題を提起する:

Banach 空間 X 及び指数 $s, r \geq 1$ を固定したとき、 X の任意の元 x, y, z に対して Hlawka 型不等式

$$\left(|x|^r+|y|^r+|z|^r\right)^{1/s} \leq C \left(|x|^r+|y|^r+|z|^r+|x+y+z|^r\right)^{1/r} \quad (**)$$

が成り立つ定数 C は存在するのか? また存在するとしたら、その最適定数は何なのか?

実はそのような定数 C は常に存在し、 $C \leq 2^{1-2/r} \cdot 3^{1/s}$ ととれる。実際 $x=a, b, c \in X$ に対して、

$$|x| \leq \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} |\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c| \leq \left(\frac{1}{8} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} |\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c|^r \right)^{1/r}$$

が成り立つから、

$$\left(|a|^r+|b|^r+|c|^r\right)^{1/s} \leq 3^{1/s} \left(\frac{1}{8} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} |\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c|^r \right)^{1/r} \quad (***)$$

である。そこで、変数変換:

$$x=a-b+c, y=a+b-c, z=-a+b+c$$

を考えると、(***) は

$$\begin{aligned} & \left(|x+y|^r+|y+z|^r+|z+x|^r\right)^{1/s} \\ & \leq 2^{1-2/r} 3^{1/s} \left(|x|^r+|y|^r+|z|^r+|x+y+z|^r\right)^{1/r} \end{aligned}$$

となるからである。従って最適定数を $C(s, r; X)$ と書けば、

$$C(s, r; X) \leq 2^{1-2/r} \cdot 3^{1/s}$$

を得る。更に $C(s, r; \ell_n^\infty) = 2^{1-2/r} \cdot 3^{1/s}$ ($3 \leq n \leq \infty$) である。実際、

$$x = (-1, 1, 1, 0, 0, \dots), y = (1, -1, 1, 0, 0, \dots), z = (1, 1, -1, 0, 0, \dots)$$

は最適定数を実現させるベクトルとなっている。しかしながら、Hlawka 不等式及びそれに付随する不等式から容易に

$$C(1, 1; H) = 1, C(2, 2; H) = 1 \quad (H: \text{a Hilbert space})$$

であるが、

$$1 < 2^{1-2/r} \cdot 3^{1/s} \Big|_{s=1, r=1} = \frac{3}{2}, \quad 1 < 2^{1-2/r} \cdot 3^{1/s} \Big|_{s=2, r=2} = \sqrt{3}$$

であるため、Hilbert 空間 H では、Hlawka 型不等式の最適定数 $C(s, r; H)$ はもっとシャープなものが予想される。実際次の様な定理が成り立つ。

Theorem 1. Let H be a Hilbert space. Then

- (i) $C(s, r; H) = 2^{1-2/r}$ for $2 \leq s < \infty, \frac{s}{s-1} \leq r < \infty$.
- (ii) $C(s, r; H) = 2^{1-2/r} \cdot 3^{1/s-1/2}$ for $1 \leq s \leq 2 \leq r < \infty$.
- (iii) $C(s, r; H) = 2 \cdot 3^{1/s} (3^r + 3)^{-1/r}$ for $1 \leq s \leq r \leq 2$.

証明は変数変換をすることによって、type - cotype 理論に持ち込み、そこで、 (p, p') -Clarkson type inequality (Kato-Takahashi [4]), Figiel-Iwaniec-Pelczynski [2] の結果等を利用してなされる。

我々の定理は指数領域: $\min\left(s, \frac{s}{s-1}\right) \leq r$ について最適定数 $C(s, r; H)$ を決定したものであるが、残された領域: $\min\left(s, \frac{s}{s-1}\right) > r$ については、 $C(s, r; H)$ の決定は困難が予想される。例えば Haagerup [3] は、方程式 $\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $1 < r < 2$ の一意解を $r_0 (= 1.84742 \dots)$ としたとき、 $C(2, r; H) = 2^{1/2-1/r}$ for $1 \leq r \leq r_0$ であること、更に $s=2, r_0 \leq r < 2$ については、ガンマ関数を用いた定数 (これが最適かどうかは不明) で抑えられることを膨大な計算によって示しているが、これとて情報としては measure zero であろう。他に [5], [6], [7] 等も参照されたい。

最後に Banach 空間 X に対する Hlawka 型不等式の最適定数 $C(s, r; X)$ は、作用素論的に考えると、次のような意味を持つことに注意したい: 行列

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を Banach 空間 $\ell_3^s(X)$ から Banach 空間 $\ell_4^r(X)$ への線形作用素と考えるとき、これは有界で且つ単射である。従って、逆写像 $T^{-1}: T(\ell_3^s(X)) \rightarrow \ell_3^s(X)$ が考えられる。この

とき変数変換：

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \frac{y+z}{2}, \quad c = \frac{z+y}{2}$$

を考えると、不等式 (**) は

$$2 \|(a, b, c)\|_{\ell_3^s(X)} \leq C \|T(a, b, c)\|_{\ell_4^r(X)}$$

となる。このことは、

$$C(s, r; X) = 2 \|T^{-1}\|$$

であることを示している。従って最適定数 $C(s, r; X)$ を求めることは、ある種の具体的な作用素ノルムを求めていることになる。

最適定数を実現させるベクトルを全て求めることは困難であるが、 $r=s=1$ の場合、つまりもともとの Hlawka 不等式 (*) については決定できることを証明を付けて述べてみる。

Theorem 2. Hilbert 空間 H の元 x, y, z が与えられたとき、Hlawka inequality

$$|x+y| + |y+z| + |z+x| \leq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|$$

の等号が成立するための必要十分条件は、次のどれかが成り立つことである：

- (i) x, y, z のうちどれか一つはゼロである。
- (ii) $x+y+z=0$.
- (iii) H の単位ベクトル e が存在して、 $x=\alpha e, y=\beta e, z=\gamma e$ と書ける。但し、 α, β, γ は $|\alpha+\beta| + |\beta+\gamma| + |\gamma+\alpha| = |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\alpha+\beta+\gamma|$ を満たすスカラーである。

証明。等号成立と仮定する。 x, y, z のどれもゼロでないとする。従って、Hlawka inequality を示すとき、知られた等式

$$\begin{aligned} & (|x| + |y| + |z| + |x+y+z| - |x+y| - |y+z| - |z+x|)(|x| + |y| + |z| + |x+y+z|) \\ &= (|y| + |z| - |y+z|)(|x| - |y+z| + |x+y+z|) \\ &\quad + (|z| + |x| - |z+x|)(|y| - |z+x| + |x+y+z|) \\ &\quad + (|x| + |y| - |x+y|)(|z| - |x+y| + |x+y+z|) \quad (\geq 0) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{cases} (1) \ y = \alpha z \text{ or } (1') \ y+z = \alpha' z \\ (2) \ z = \beta x \text{ or } (2') \ z+x = \beta' y \\ (3) \ x = \gamma y \text{ or } (3') \ x+y = \gamma' z \end{cases}$$

でなければならない。ここに $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ はあるスカラーである。従って、

$(1) \wedge (2) \wedge (3), (1) \wedge (2') \wedge (3), (1) \wedge (2) \wedge (3'), (1) \wedge (2') \wedge (3'), (1') \wedge (2) \wedge (3), (1') \wedge (2') \wedge (3),$
 $(1') \wedge (2) \wedge (3'), (1') \wedge (2') \wedge (3'),$

の8通りが考えられるが、 $(1') \wedge (2') \wedge (3')$ 以外の場合については、(iii) に帰する。そこで $(1') \wedge (2') \wedge (3')$ の場合について考えると、

$$y + z = \alpha'x, z + x = \beta'y, x + y = \gamma'z$$

である。x, y, z のどれもゼロでなかったから

$$\begin{vmatrix} -\alpha' & 1 & 1 \\ 1 & -\beta' & 1 \\ 1 & 1 & -\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

である。ここでもし $\alpha' = 0$ と仮定すると、上の4式から、 $x = (\beta' + 1)y$ を得る。これは (iii) に帰する。 $\beta' = 0, \gamma' = 0$ も同様であるから、結局 α', β', γ' は全てゼロでない
と仮定出来る。従って、 $z + x = \beta'y, x + y = \gamma'z$ から、 $(1 + \frac{1}{\gamma'})x = (\beta' - \frac{1}{\gamma'})y$ を得る。こ
こでもし $\beta' \neq \frac{1}{\gamma'}$ なら、 $y + z = \alpha'x$ と合わせて、(iii) に帰する。もし、 $\beta' = \frac{1}{\gamma'}$ なら
 $\gamma' = -1$ でなければならないから、これは (ii) に帰する。

逆に (i), (ii), (iii) のうちのどれかが成り立てば、Hlawka inequality の等号が成立
することを見ることは易しい。証明終

References

- [1] P. S. Bullen, D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, Means and Their Inequalities, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo, 1988.
- [2] T. Figiel, T. Iwaniec and A. Pelczynski, Computing norms and critical exponents of some operators in L^p -spaces, Studia Math., 79(1984), 227-274.
- [3] U. Haagerup, The best constant in the Khintchine inequality, Studia Math., 70 (1982), 231-283.
- [4] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, Math. Nachr., 186(1997), 187-196.
- [5] R. Latała and K. Oleszkiewicz, On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality, Studia Math., 109(1994), 101-104.
- [6] S. J. Szarek, On the best constants in the Khinchin inequality, Studia Math., 58 (1976), 197-208.
- [7] L. R. Williams and J. H. Wells, L^p inequalities, J. Math. Anal. Appl., 64(1978), 518-529.